

## *Document de recherche*

# Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation selon la MCAB

## Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie

Décembre 2013

Document 213107

*This document is also available in English*  
© 2013 Institut canadien des actuaires

*Les documents de recherche ne représentent pas nécessairement l'opinion de l'Institut canadien des actuaires. Les membres doivent connaître les documents de recherche. Les documents de recherche ne constituent pas des normes de pratique et sont donc de caractère non exécutoire. Il n'est pas obligatoire que les documents de recherche soient conformes aux normes. Le mode d'application de normes dans un contexte particulier demeure la responsabilité des membres.*

## Note de service

**À :** Tous les praticiens en assurance-vie

**De :** Bruce Langstroth, président  
Direction de la pratique actuarielle  
Alexis Gerbeau, président  
Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie

**Date :** Le 21 décembre 2013

**Objet :** **Document de recherche – Étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation selon la MCAB**

La Commission des rapports financiers des compagnies d'assurance-vie (CRFCAV), par l'entremise du Groupe de travail sur l'étalonnage, a adopté une approche en plusieurs étapes pour mettre au point des critères d'étalonnage des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque.

Les travaux de la phase initiale ont porté sur les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme. Les résultats des travaux et les recommandations du groupe de travail ont été publiés dans une [note éducative](#) en décembre 2009.

La présente mise à jour porte sur les taux d'intérêt sans risque à court et à moyen termes ainsi que sur la relation entre les taux à court et à long termes (pente). Les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme ont aussi été revus et mis à jour pour tenir compte de l'expérience jusqu'à la fin de 2012.

Ces critères d'étalonnage sont directement applicables aux taux d'intérêt sans risque canadiens ou aux instruments libellés en dollars canadiens, mais ils pourraient être adaptés pour les États-Unis et d'autres pays industrialisés.

Les critères d'étalonnage reposent sur les données historiques des taux d'intérêt depuis les années 1930, dont la portée est jugée suffisamment grande pour couvrir une vaste gamme d'éventuelles réalisations de taux d'intérêt sans risque. Dans le cadre de la mise à jour de ce document de recherche, les critères d'étalonnage de la phase initiale qui s'appuyaient sur l'expérience historique des taux d'intérêt sans risque à long terme jusqu'en 2007 ont été mis à jour pour tenir compte de l'expérience jusqu'en 2012.

La distribution mise à jour des taux utilisée comme base pour les critères d'étalonnage de l'état stationnaire a démontré que l'écart entre l'expérience historique et les critères d'étalonnage s'est élargi aux 5<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> percentiles. Il a donc été décidé qu'il y avait lieu de réviser les critères d'étalonnage.

Comme pour tout ce que promulgue le Conseil des normes actuarielles (CNA), la CRFCAV a l'intention de revoir de temps à autre l'expérience mise à jour, ce qui pourrait nous amener à réviser les critères d'étalonnage dans l'avenir. Spécifiquement, si les percentiles de l'expérience historique mise à jour des taux d'intérêt varient de plus de 20 à 30 points de base par rapport à l'expérience correspondante jusqu'en 2012, il serait alors approprié de revoir les critères d'étalonnage<sup>1</sup> (section 4.1.1).

Le présent document de recherche porte sur la mise au point des critères pour étalonner les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans la production de scénarios de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance selon la méthode canadienne axée sur le bilan (MCAB). Il faudra peut-être pour cela générer un grand nombre de scénarios. Aux fins de l'évaluation, on peut avoir recours à un sous-ensemble de scénarios ou à un nombre moindre de scénarios conçus pour représenter l'ensemble des scénarios stochastiques. Les méthodes servant à réduire le nombre de scénarios ne s'inscrivent pas dans la portée du présent document. L'actuaire peut consulter les conseils de l'ICA à propos de l'utilisation d'approximations et la documentation disponible traitant des techniques de réduction du nombre de scénarios.

Enfin, la CRFCAV tient à souligner la contribution du groupe de travail et à en remercier les membres, Wallace Bridel, David Campbell, Sara Lang, Chen Xing, Martin Labelle, André Veilleux, Chong Zheng et Nadine Gorsky, pour leurs efforts. Les membres du groupe de travail ont contribué aux travaux en fonction de leurs propres compétences et expertise. Les idées exprimées dans ce document de recherche sont le fruit d'un consensus général parmi les membres du groupe de travail. Rien dans le présent document de recherche ne serait interprété comme représentant l'opinion de l'un ou l'autre des employeurs des membres du groupe, ou comme une opinion ou une position à l'égard de la politique des organismes de réglementation.

Conformément à la Politique sur le processus officiel d'approbation de matériel d'orientation autre que les normes de pratique, le présent document de recherche a été préparé par la CRFCAV et approuvé pour diffusion par la Direction de la pratique actuarielle le 21 décembre 2013.

Pour toute question ou commentaire à propos du présent document de recherche, veuillez communiquer avec Alexis Gerbeau à [alexis.gerbeau@standardlife.ca](mailto:alexis.gerbeau@standardlife.ca).

BL, AG

---

<sup>1</sup> Si les taux d'intérêt demeurent au niveau en vigueur au moment de la rédaction de cette mise à jour, il est donc probable que les critères d'étalonnage seraient révisés d'ici 2015-2016.

## TABLE DES MATIÈRES

1. OBJET / RÉSUMÉ .....	5
2. OBJECTIFS ET PRINCIPES .....	7
3. TAUX D'INTÉRÊT HISTORIQUES .....	8
4. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT À LONG TERME.....	10
4.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans des taux à long terme.....	10
4.1.1 Comparaison avec les valeurs historiques .....	11
4.1.2 Comparaison avec les résultats modélisés .....	12
4.2 Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans du taux à long terme .....	13
4.3 Critères d'étalonnage du retour à la moyenne du taux à long terme .....	14
5. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DU TAUX À COURT TERME .....	15
5.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans du taux à court terme.....	16
5.1.1 Comparaison avec les résultats historiques .....	16
5.2 Critères d'étalonnage sur deux ans du taux à court terme .....	17
6. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DE LA PENTE SUR 60 ANS .....	17
6.1 Comparaison avec les résultats historiques .....	18
7. CONSEILS SUR LES TAUX À MOYEN TERME .....	18
8. PRODUCTION DE SCÉNARIOS .....	20
9. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE POUR D'AUTRES PAYS.....	20
ANNEXE A .....	22
ANNEXE B .....	28
ANNEXE C .....	31
ANNEXE D .....	32
ANNEXE E.....	34

## 1. OBJET/RÉSUMÉ

Le présent document de recherche a pour objet de mettre au point des critères pour étalonner les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans la production de scénarios de taux d'intérêt sans risque aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance selon la MCAB. On y trouve des conseils mis à jour pour les taux d'intérêt sans risque à long terme (échéance résiduelle d'au moins 20 ans) et de nouveaux conseils pour les taux d'intérêt sans risque à court terme (échéance d'un an), les taux d'intérêt sans risque à moyen terme (échéance de cinq à 10 ans) et la pente<sup>2</sup> de la courbe de rendement.

Dans les normes de pratique, il y a des recommandations concernant le choix des scénarios stochastiques de taux d'intérêt sans risque. Les divers modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque et l'établissement des paramètres des modèles peuvent produire des ensembles de scénarios considérablement différents. Nonobstant toute définition d'une fourchette plausible de taux d'intérêt canadiens sans risque, les normes de pratique donnent peu de conseils quant au choix, à l'ajustement et à l'utilisation d'un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque. Un des objectifs de la CRFCAV est de réduire l'étendue de la pratique et ces conseils supplémentaires appuient cet objectif.

Les critères d'étalonnage présentés dans ce document de recherche sont conçus pour servir à valider les ensembles de scénarios de monde réel qui projettent l'évolution des taux sans risque sur des horizons à long terme aux fins de l'évaluation du passif des contrats d'assurance. Inversement, les critères d'étalonnage présentés dans ce document de recherche ne conviendraient pas pour valider un ensemble de scénarios de taux d'intérêt visant à prendre en compte la dynamique courante du marché.

Il serait considéré comme une pratique exemplaire de modéliser de façon cohérente à la fois les actifs à revenu fixe des comptes généraux et des comptes de fonds distincts si on a recours à des scénarios de monde réel de taux d'intérêt sans risque. Ainsi, la recherche sur l'étalonnage des rendements à revenu fixe pour le passif des fonds distincts est développée conformément au présent document de recherche.

L'approche normale pour bâtir un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et générer des ensembles de scénarios de taux d'intérêt serait de choisir une forme de modèle puis d'estimer un ensemble initial de paramètres pour le modèle en utilisant des techniques statistiques. La série de scénarios découlant du modèle serait ensuite examinée pour déterminer si les critères d'étalonnage ont été respectés. S'il y a lieu, les paramètres seraient ajustés afin de générer un nouvel ensemble de scénarios conformes aux critères d'étalonnage.

Il peut ne pas être nécessaire de respecter rigoureusement les critères d'étalonnage pour utiliser les scénarios stochastiques de taux d'intérêt sans risque, en particulier quand certains des taux à court terme, des taux à long terme ou certaines pentes n'ont pas un effet important sur l'évaluation. Il peut aussi s'avérer possible de satisfaire aux critères d'étalonnage de l'extrémité gauche, mais non à ceux de l'extrémité droite si on peut démontrer que le résultat qui en découle est plus conservateur. Dans de telles situations,

---

<sup>2</sup> Correspond au taux sans risque à long terme moins le taux sans risque à court terme.

se référer aux conseils de l'ICA à propos de l'importance relative et du recours à des approximations.

Enfin, de nombreux modèles de taux d'intérêt sans risque sont disponibles, allant des modèles à volatilité fixe aux modèles à volatilité stochastique et allant des modèles à régime unique aux modèles à régimes multiples. Il est impossible de dresser la liste de tous les modèles. Cependant, des commentaires généraux et un aperçu de quelques modèles sélectionnés figurent à l'annexe A.

Pour faciliter la tâche, les critères d'étalonnage des taux sans risque à long terme et à court terme et les pentes sont résumés ci-dessous. En ce qui concerne les taux sans risque à moyen terme, des conseils qualitatifs sont donnés à la section 7. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

**Critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme  
(échéance de  $\geq 20$  ans)**

Horizon		Deux ans			10 ans			60 ans
<b>Taux initial</b>		4,00 %	6,25 %	9,00 %	4,00 %	6,25 %	9,00 %	6,25 %
<b>Percentile, extrémité gauche</b>	2,5 <sup>e</sup>	2,85 %	4,25 %	6,20 %	2,30 %	2,90 %	3,65 %	2,60 %
	5,0 <sup>e</sup>	3,00 %	4,50 %	6,60 %	2,50 %	3,20 %	4,25 %	2,80 %
	10,0 <sup>e</sup>	3,25 %	4,80 %	7,05 %	2,85 %	3,65 %	4,95 %	3,00 %
<b>Percentile, extrémité droite</b>	90,0 <sup>e</sup>	5,15 %	7,80 %	10,60 %	6,85 %	9,35 %	11,60 %	10,00 %
	95,0 <sup>e</sup>	5,55 %	8,30 %	11,20 %	7,85 %	10,40 %	12,80 %	12,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	5,85 %	8,70 %	11,70 %	8,85 %	11,40 %	13,90 %	13,50 %

Une fourchette de valeurs se situant autour de la valeur médiane historique peut être produite et serait acceptable, même si on s'attendrait généralement à une valeur médiane à l'horizon de 60 ans entre 4,50 % et 6,75 %. Une valeur médiane à l'extérieur de cette fourchette devrait être justifiée.

Pour tous les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque à long terme, la période de retour à la moyenne ne serait pas inférieure à 14,5 ans.

**Critères d'étalonnage des taux sans risque à court terme (échéance d'un an)**

Horizon		Deux ans			60 ans
<b>Taux initial</b>		2,00 %	4,50 %	8,00 %	4,50 %
<b>Percentile, extrémité gauche</b>	2,5 <sup>e</sup>	0,85 %	2,35 %	5,50 %	0,80 %
	5,0 <sup>e</sup>	1,00 %	2,70 %	5,95 %	0,90 %
	10,0 <sup>e</sup>	1,15 %	3,10 %	6,40 %	1,00 %
<b>Percentile, extrémité droite</b>	90,0 <sup>e</sup>	3,00 %	5,90 %	9,75 %	10,00 %
	95,0 <sup>e</sup>	3,35 %	6,30 %	10,25 %	12,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	3,60 %	6,65 %	10,65 %	13,50 %

**Critères d'étalonnage de la pente (le taux à long terme moins le taux à court terme)**

Horizon		60 ans
Percentile, extrémité gauche	5 <sup>e</sup>	-1,00 %
	10 <sup>e</sup>	-0,25 %
Percentile, extrémité droite	90 <sup>e</sup>	2,50 %
	95 <sup>e</sup>	3,00 %

De plus amples détails seront fournis dans le reste du présent document de recherche.

**2. OBJECTIFS ET PRINCIPES**

Afin de produire des critères d'étalonnage raisonnables, les principes suivants ont été adoptés. Les critères d'étalonnage :

- seraient suffisamment rigoureux pour restreindre l'étendue de la pratique, tout en permettant à l'actuaire d'appliquer un jugement raisonnable dans des circonstances particulières;
- seraient appliqués aux ensembles de scénarios de taux d'intérêt sans risque produits;
- seraient appliqués non seulement aux parties à l'état stationnaire des scénarios de taux d'intérêt sans risque produits, mais également au court terme;
- favoriseraient l'élaboration d'ensembles de scénarios de taux d'intérêt sans risque qui prennent en compte à la fois les chocs à la courbe de rendement et les baisses ou les augmentations de taux d'intérêt sur de longues périodes de temps, en accord avec les observations historiques;
- intégreraient une vaste distribution de scénarios de taux d'intérêt sans risque ainsi que des environnements qui persistent sur des périodes prolongées.

Un agencement de critères d'étalonnage quantitatifs et de conseils d'ordre qualitatif a été élaboré. Des critères quantitatifs sont fournis pour les taux sans risque à court terme et à long terme. Un ensemble de critères d'étalonnage reposant exclusivement sur une analyse quantitative peut dépendre de manière exagérée des données historiques, peut être influencé de manière subjective par le choix de la période historique et ne tient pas compte des différences économiques et monétaires entre la période historique sélectionnée et la période actuelle. Les conseils qualitatifs, comme ceux présentés pour les taux sans risque à moyen terme dans ce document de recherche, viennent compléter les exigences quantitatives et incitent l'actuaire à utiliser son jugement pour évaluer la pertinence des résultats des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque.

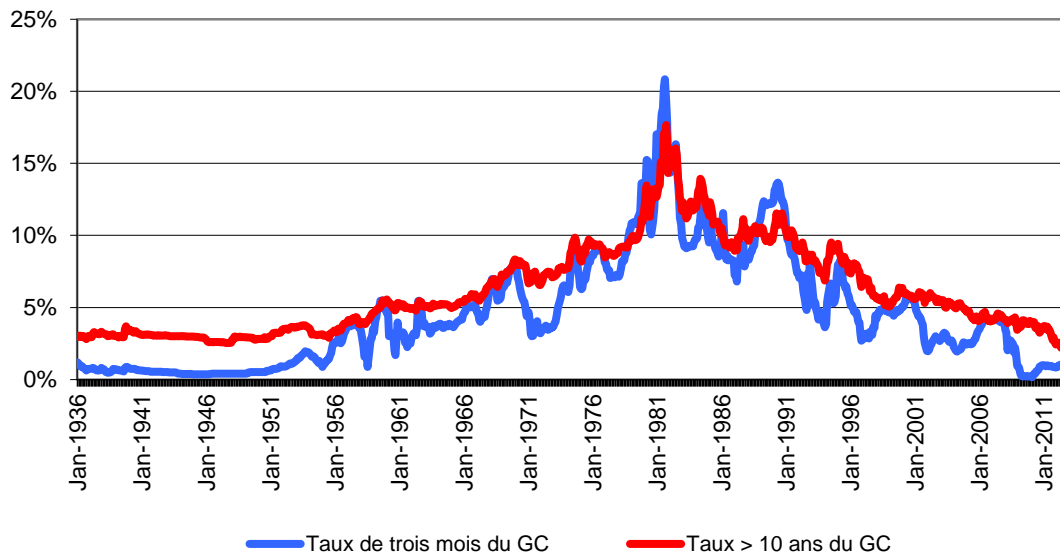
On s'est demandé s'il fallait examiner les taux réels (et l'inflation) ou les taux nominaux. Les taux nominaux ont été sélectionnés étant donné qu'il n'était pas pratique de modéliser la relation complexe entre les taux réels et l'inflation et que la disponibilité des taux nominaux historiques était meilleure. L'actuaire consulterait les normes de pratique s'il a besoin de conseils afin de formuler des hypothèses concernant l'inflation qui sont conformes aux taux nominaux générés par le modèle stochastique étalonné de taux d'intérêt sans risque.

### 3. TAUX D'INTÉRÊT HISTORIQUES

Les taux d'intérêt sans risque historiques canadiens, depuis les années 1930, sont présentés dans le graphique ci-dessous. Trois schémas distincts peuvent être observés avec, en premier lieu, une période de faibles taux d'intérêt qui prévalaient à partir de la dépression des années 1930 jusqu'à la Seconde Guerre mondiale, suivie d'une période de hausse continue des taux d'intérêt jusqu'aux années 1970 et 1980 et enfin une période de taux en baisse continue jusqu'à aujourd'hui. Il a été décidé de tenir compte de l'expérience historique pour refléter ces trois périodes, car on souhaitait inclure des données portant sur une période suffisamment longue pour prendre en compte les changements au plan notamment du système monétaire et de la politique fiscale pouvant avoir exercé une influence sur le niveau et la volatilité des taux d'intérêt.

#### Taux historiques des obligations du gouvernement du Canada à court terme et à long terme

##### CAD - Janvier 1936 à décembre 2012



Source : Banque du Canada, séries V122541 et V122487<sup>3</sup>

Même si la série CANSIM V122487 contient des rendements de 1919 à aujourd'hui, nous avons choisi de n'utiliser que les taux depuis la fondation de la Banque du Canada en 1935. Les rendements indiqués dans la série pour la période avant 1936 sont calculés selon une base différente de celle utilisée pour les rendements à compter du 1<sup>er</sup> janvier 1936. Nous avons choisi d'utiliser comme point de départ la date du

<sup>3</sup> La série V122541 correspond aux bons du Trésor du gouvernement du Canada – rendement moyen – trois mois. La série V122487 correspond aux obligations négociables du gouvernement du Canada – rendement moyen – plus de 10 ans.

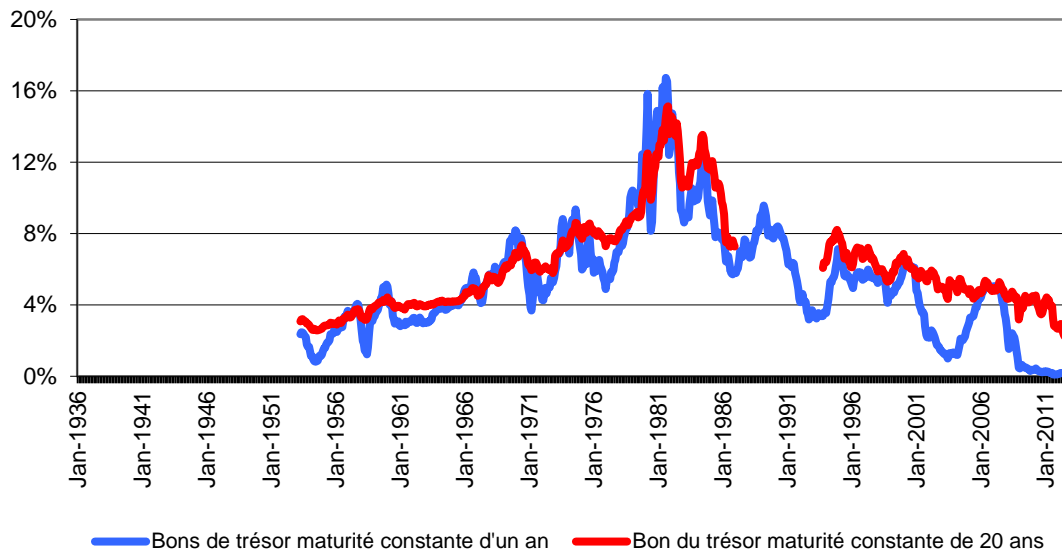


1<sup>er</sup> janvier 1936 plutôt que d'essayer d'ajuster les données historiques antérieures selon une base conforme à celle des données postérieures à 1936.

Le graphique suivant illustre les taux d'intérêt historiques aux États-Unis; les schémas sont semblables à ceux du Canada. Ces données sont présentées à titre d'information seulement et n'ont pas été prises en compte dans l'élaboration des critères d'étalonnage des taux d'intérêt canadiens.

### Taux historiques des bons du Trésor à échéance constante de 20 ans et taux des bons du Trésor à échéance constante d'un an des États-Unis

#### USD - Avril 1953 à décembre 2012



Source : Federal Reserve Bank de St. Louis

Les critères d'étalonnage ont été conçus pour faciliter la mise au point d'un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque produisant des scénarios ayant les caractéristiques suivantes :

- produire une grande variété de scénarios de taux d'intérêt, en accord avec les fourchettes historiques;
- produire des périodes continues de taux d'intérêt faibles;
- produire des périodes continues de taux d'intérêt élevés (mais avec faible probabilité de taux extrêmement élevés);
- produire des périodes de taux à tendance à la baisse et de taux à tendance à la hausse;
- produire des périodes de courbe de rendement inversée;
- produire une pente raisonnable entre les taux à long terme et à court terme;
- passer entre des taux faibles et des taux élevés dans une période de temps raisonnable.

Ces caractéristiques peuvent aussi être observées au cours des 70 dernières années dans les graphiques ci-haut.

#### **4. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DES MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT À LONG TERME**

Cette section donne un aperçu de l'ensemble complet des critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme qui sont présumés correspondre à une échéance de 20 ans ou plus.

Des critères d'étalonnage ont été élaborés pour les horizons de deux ans, 10 ans et 60 ans. Les scénarios de taux d'intérêt aux horizons de deux ans et de 10 ans seront influencés par le taux d'intérêt initial et donc, des critères d'étalonnage pour un taux d'intérêt initial à long terme de 4 %, 6,25 % et 9 % sont fournis. À l'horizon de 60 ans, on s'attend à ce que l'incidence du taux initial soit minimale; ainsi, seuls des critères d'étalonnage pour un taux initial de 6,25 % sont fournis. Les critères d'étalonnage visent surtout les extrémités de la distribution (c.-à-d.,  $\leq 10^{\text{e}}$  percentile et  $\geq 90^{\text{e}}$  percentile).

L'utilisation de taux initiaux fixes aux fins de l'étalonnage permet d'aborder la question pratique à savoir que, dans la plupart des cas, les paramètres des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque seront établis, les modèles seront testés et les scénarios seront générés avant la date d'évaluation et il est attendu que les taux d'intérêt fluctuent pendant cette période.

L'étalonnage des taux à long terme est assujéti à trois exigences : 1) satisfaire aux critères d'étalonnage sur 60 ans; 2) satisfaire aux critères d'étalonnage à court terme (entre deux et 10 ans); et 3) satisfaire à une contrainte du retour à la moyenne.

Les critères d'étalonnage sur 60 ans ont d'abord été établis en fonction de l'expérience historique. Les critères d'étalonnage sur un horizon à plus court terme ont ensuite été établis en fonction des résultats générés par des modèles dont les paramètres avaient été établis pour respecter les critères d'étalonnage sur 60 ans.

L'élaboration des critères d'étalonnage est expliquée plus en détail dans les sections suivantes.

##### **4.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans des taux à long terme**

L'*état stationnaire* est défini comme le moment au-delà duquel la distribution des taux d'intérêt générés par les modèles ne change que de manière négligeable ou au-delà duquel l'influence du taux d'intérêt initial est minimale. Idéalement, les critères d'étalonnage seraient établis au point de l'état stationnaire. Cependant, étant donné que ce moment peut se produire dans un avenir très lointain et qu'il peut varier selon le type du modèle et les paramètres établis, on suppose, aux fins de l'étalonnage, qu'un horizon de projection de 60 ans est suffisant pour dire que l'état stationnaire a été atteint. Les critères des taux à long terme sur un horizon de 60 ans sont présentés ci-dessous.

## Critères d'étalonnage sur 60 ans

<b>Taux initial</b>		6,25 %
<b>Percentile, extrémité gauche</b>	2,5 <sup>e</sup>	2,60 %
	5,0 <sup>e</sup>	2,80 %
	10,0 <sup>e</sup>	3,00 %
<b>Percentile, extrémité droite</b>	90,0 <sup>e</sup>	10,00 %
	95,0 <sup>e</sup>	12,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %

Ces critères seront respectés si le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque produit des résultats qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, avec un taux initial à long terme de 6,25 %. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

Des critères d'étalonnage sont fournis pour l'extrémité gauche et l'extrémité droite de la distribution des scénarios. De 1936 à 2012, le rendement moyen et médian des obligations canadiennes à long terme sans risque se situait à 6,16 % et 5,30 %, respectivement<sup>4</sup>. Les 40<sup>e</sup> et 60<sup>e</sup> percentiles se situent à 4,69 % et 5,99 %, respectivement. Une fourchette de valeurs se situant autour de la médiane historique peut être produite et serait acceptable, cependant on s'attendrait généralement à une valeur médiane se situant entre 4,50 % et 6,75 %<sup>5</sup>. Une valeur médiane à l'extérieur de cette fourchette devrait être justifiée.

## 4.1.1 Comparaison avec les résultats historiques

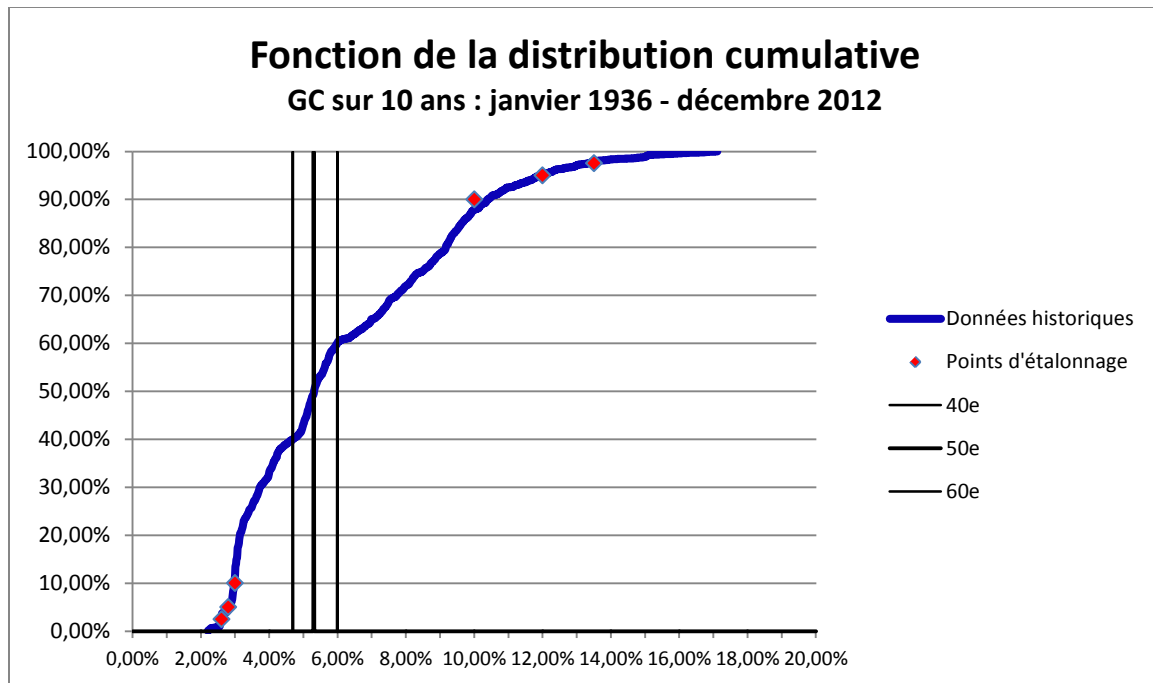
Comme on peut le constater dans le tableau et le graphique ci-dessous, les critères d'étalonnage sont en accord avec les résultats historiques jusqu'en 2012 à la plupart des points d'étalonnage.

<b>Critères d'étalonnage</b>			<b>1936–2012</b>	<b>Écart</b>
<b>Percentile, extrémité gauche</b>	2,5 <sup>e</sup>	2,60 %	2,59 %	0,01 %
	5,0 <sup>e</sup>	2,80 %	2,81 %	(0,01) %
	10,0 <sup>e</sup>	3,00 %	2,97 %	0,03 %
<b>Percentile, extrémité droite</b>	90,0 <sup>e</sup>	10,00 %	10,41 %	(0,41) %
	95,0 <sup>e</sup>	12,00 %	12,00 %	0,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,37 %	0,13 %

Le graphique qui suit illustre également que les critères d'étalonnage correspondent étroitement à l'expérience historique jusqu'en 2012.

<sup>4</sup> Comparativement à 6,35 % et 5,55 % dans la note éducative originale de 2009, d'après les données jusqu'en 2007.

<sup>5</sup> Dans la note éducative de 2009, une fourchette de 5,00 % à 6,75 % correspondait aux 40<sup>e</sup> et 60<sup>e</sup> percentiles de l'expérience historique. Avec l'expérience mise à jour, la limite inférieure a été ramenée à 4,50 %. La limite supérieure est demeurée à 6,75 %, conformément aux critères d'étalonnage de l'extrémité droite, qui, eux aussi, demeurent inchangés depuis la note éducative de 2009.



Source : Banque du Canada, série V122487

#### 4.1.2 Comparaison avec les résultats des modèles

Les critères d'étalonnage sur 60 ans ont été mis à l'essai à l'aide de deux types de modèles couramment utilisés et publiquement disponibles, avec deux ensembles différents de paramètres pour chacun. La mise à l'essai des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque visait à déterminer si les types de modèles courants pouvaient, avec l'établissement de paramètres raisonnables, produire des scénarios respectant les critères d'étalonnage.

À cette fin, on a mis à l'essai divers types de modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque, utilisant deux ensembles de paramètres différents pour chacune des formes de modèles Cox-Ingersoll-Ross (CIR) et Brennan-Schwartz (BS). Les résultats de la mise à l'essai sont présentés dans le tableau qui suit. Les détails sur l'établissement des modèles CIR et BS figurent à l'annexe B.

### Critères d'étalonnage sur 60 ans – Résultats de la mise à l'essai des modèles

Percentile	Critères	CIR Ensemble de paramètres 1	CIR Ensemble de paramètres 2	BS Ensemble de paramètres 1	BS Ensemble de paramètres 2
2,5 <sup>e</sup>	2,60 %	1,94 %	1,94 %	2,31 %	2,32 %
5,0 <sup>e</sup>	2,80 %	2,39 %	2,40 %	2,60 %	2,60 %
10,0 <sup>e</sup>	3,00 %	2,99 %	2,99 %	2,99 %	2,99 %
<b>Médiane</b>		5,97 %	5,97 %	5,26 %	5,25 %
90,0 <sup>e</sup>	10,00 %	10,47 %	10,46 %	10,43 %	10,40 %
95,0 <sup>e</sup>	12,00 %	12,02 %	12,07 %	12,95 %	13,01 %
97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,53 %	13,54 %	15,89 %	15,96 %

#### 4.2 Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans des taux à long terme

Pour des critères d'étalonnage à des horizons à plus court terme, le taux initial est important. Voilà pourquoi des critères d'étalonnage appropriés pour des contextes initiaux de taux d'intérêt faibles, moyens et élevés ont été établis. L'histoire a démontré que les taux d'intérêt peuvent fluctuer considérablement sur de courtes périodes de temps et il est souhaitable de tenir compte de la dynamique des contextes initiaux de taux d'intérêt plus faibles et plus élevés. Des taux initiaux à long terme de 4,00 % et de 9,00 % ont été choisis comme taux faible et élevé types aux fins de l'élaboration des critères d'étalonnage. Ceci n'empêche pas l'utilisation du modèle étalonné avec des taux initiaux à long terme inférieurs à 4,00 % ou supérieurs à 9,00 %. Les critères d'étalonnage du taux à long terme sur un horizon à plus court terme sont présentés ci-dessous.

#### Critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans

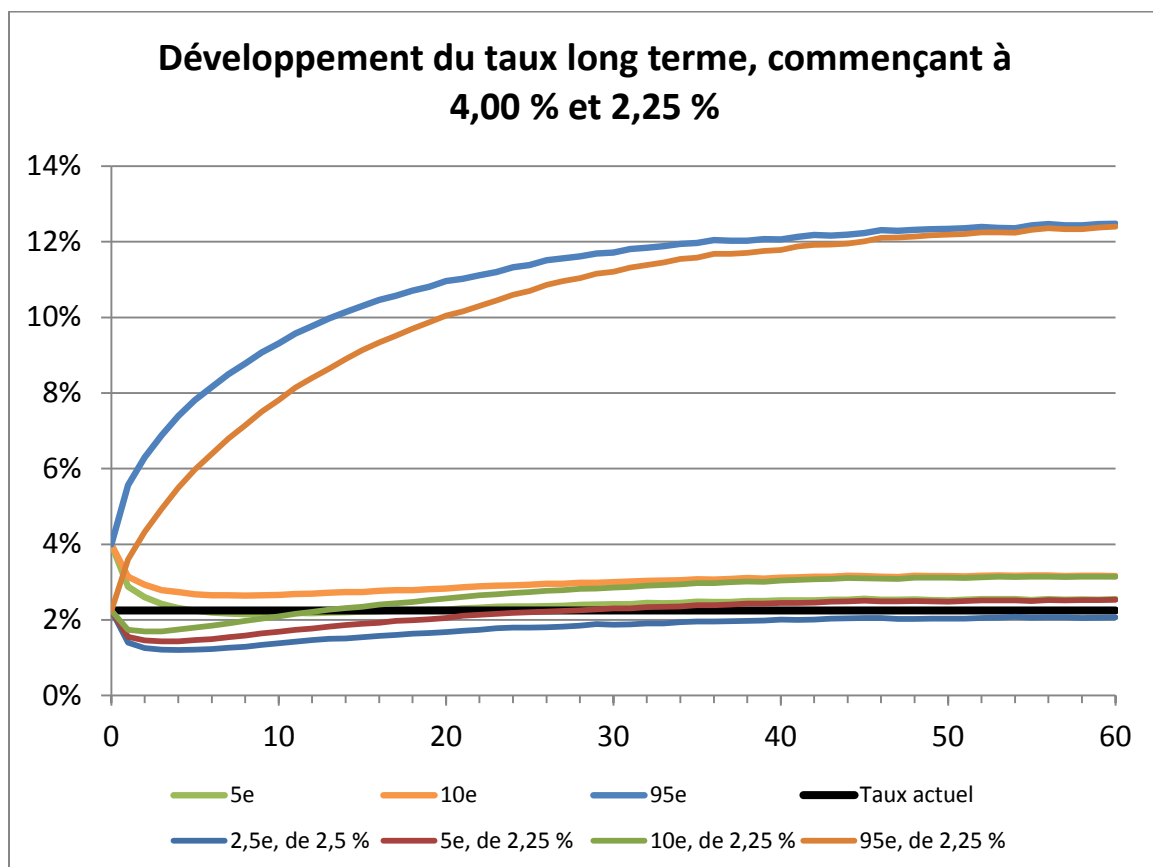
Horizon		Deux ans			10 ans		
Taux initial		4,00 %	6,25 %	9,00 %	4,00 %	6,25 %	9,00 %
<b>Percentile, extrémité gauche</b>	2,5 <sup>e</sup>	2,85 %	4,25 %	6,20 %	2,30 %	2,90 %	3,65 %
	5 <sup>e</sup>	3,00 %	4,50 %	6,60 %	2,50 %	3,20 %	4,25 %
	10 <sup>e</sup>	3,25 %	4,80 %	7,05 %	2,85 %	3,65 %	4,95 %
<b>Percentile, extrémité droite</b>	90 <sup>e</sup>	5,15 %	7,80 %	10,60 %	6,85 %	9,35 %	11,60 %
	95 <sup>e</sup>	5,55 %	8,30 %	11,20 %	7,85 %	10,40 %	12,80 %
	97,5 <sup>e</sup>	5,85 %	8,70 %	11,70 %	8,85 %	11,40 %	13,90 %

Ces critères d'étalonnage seront respectés si le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque génère des résultats qui sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, pour chacun des trois taux initiaux à long terme. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

Pour déterminer ces critères d'étalonnage, les résultats historiques ont d'abord été étudiés. Toutefois, puisque les données disponibles pour analyser la progression des taux pour chacun des taux initiaux sont limitées, les résultats des formes de modèles CIR et BS qui ont servi à tester les critères d'étalonnage sur un horizon de 60 ans ont été utilisés pour définir les critères d'étalonnage d'horizon de plus courte durée. Les critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans ont été établis en choisissant la valeur la moins contraignante à chaque point d'étalonnage parmi les résultats des quatre modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque dont il est question à l'annexe B. Les modèles respectant ces critères produiront une dispersion raisonnable des taux d'intérêt aux horizons de deux ans et de 10 ans.

Si le taux initial à long terme réel est inférieur à 4,00 % ou supérieur à 9,00 %, les modèles produiront alors des distributions de scénarios qui sont décalées par rapport aux critères d'étalonnage figurant dans le tableau ci-haut, tel qu'illustré dans le graphique suivant quand le taux initial est inférieur à 4,00 %.

L'annexe C présente une comparaison des critères d'étalonnage des taux sans risque à long terme et des critères d'étalonnage originaux mis au point pour la note éducative de 2009.



### 4.3 Critères d'étalonnage du retour à la moyenne des taux à long terme

L'expérience historique montre que les taux d'intérêt peuvent demeurer faibles durant de longues périodes de temps. Les critères d'étalonnage élaborés jusqu'ici ne contraignent

pas suffisamment les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque pour tenir compte des contextes économiques dans lesquels les taux d'intérêt demeurent faibles pendant plusieurs années.

Voilà pourquoi il a fallu ajouter une contrainte additionnelle pour tous les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque de façon à ce que la période du retour à la moyenne ne soit pas inférieure à (c.-à-d., ne soit pas de plus courte durée ou plus rapide que) 14,5 années.

Pour des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque simples comportant un facteur explicite de retour à la moyenne, il est possible de satisfaire à cette exigence en tenant compte directement de la valeur du paramètre de retour à la moyenne. Pour des modèles plus complexes, on peut avoir recours à une preuve mathématique ou à la procédure présentée à l'annexe D.

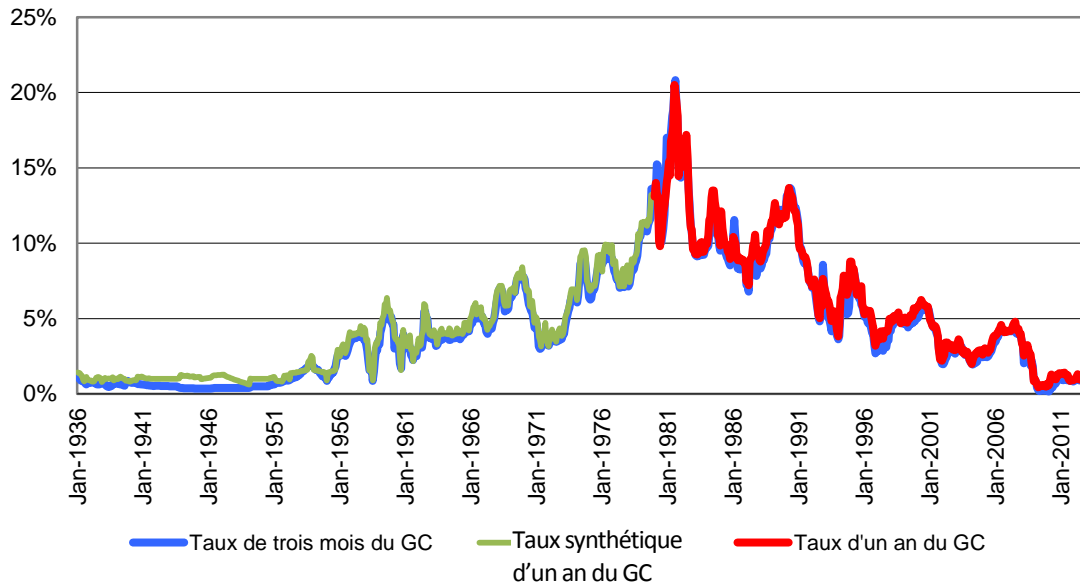
## **5. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DES TAUX À COURT TERME**

Cette section présente les critères d'étalonnage du taux sans risque à court terme, qui est présumé correspondre à une échéance d'un an.

L'approche utilisée pour déterminer les critères d'étalonnage du taux à court terme était conforme à celle utilisée pour le taux à long terme, c'est-à-dire que les critères d'étalonnage sur 60 ans ont été établis en premier en fonction de l'expérience historique. Puis, les critères d'étalonnage sur un horizon plus rapproché ont été fondés sur les résultats générés par les modèles dont les paramètres respectent les critères d'étalonnage sur 60 ans. Lorsqu'il y a chevauchement dans la méthode décrite pour les taux à long terme, ce n'est pas répété ici.

L'expérience historique pour le taux sur un an n'est disponible qu'à compter de 1980 et celle pour le taux sur trois mois est disponible à partir des années 1930. L'expérience est hautement corrélée entre les deux séries de taux, comme on peut le constater dans le graphique ci-dessous. Afin d'avoir une période historique pour le taux à court terme qui est conforme à celle du taux à long terme, une série synthétique de taux sur un an a été dérivée en fonction de l'échéance sur trois mois pour la période complète et du lien entre les taux sur trois mois et les taux sur un an entre 1980 et 2012. La méthode est expliquée en détail à l'annexe E.

## CAD - Janvier 1936 à décembre 2012



## 5.1 Critères d'étalonnage sur 60 ans du taux à court terme

Les critères d'étalonnage sur un horizon de 60 ans du taux à court terme sont indiqués ci-dessous.

## Critères d'étalonnage sur 60 ans

Percentile		Taux initial
		4,50 %
Extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	0,80 %
	5 <sup>e</sup>	0,90 %
	10 <sup>e</sup>	1,00 %
Extrémité droite	90 <sup>e</sup>	10,00 %
	95 <sup>e</sup>	12,00 %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %

Ces critères d'étalonnage seront respectés si la distribution des taux sur un an qui sont générés par le modèle au point des 60 ans sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite, avec un taux à court terme initial de 4,5 %. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

## 5.1.1 Comparaison avec les résultats historiques

La comparaison avec l'expérience historique suivante est donnée à des fins de référence.



Percentile		Critères d'étalonnage	Janv. 1936 - déc. 2012	Écart
Extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	0,80 %	0,82 %	-0,02 %
	5 <sup>e</sup>	0,90 %	0,91 %	-0,01 %
	10 <sup>e</sup>	1,00 %	1,01 %	-0,01 %
Extrémité droite	90 <sup>e</sup>	10,00 %	10,24 %	-0,24 %
	95 <sup>e</sup>	12,00 %	12,14 %	-0,14 %
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,50 %	0,00 %

Les taux d'intérêt historiques se fondent sur les taux réels sur un an entre 1980 et 2012 et sur les taux synthétiques sur un an entre 1935 et 1979. Les critères d'étalonnage de l'extrémité gauche sont arrondis en fonction de la distribution historique. Les critères d'étalonnage de l'extrémité droite sont établis au même niveau que les critères d'étalonnage de l'extrémité droite pour les taux à long terme, puisque l'expérience historique est semblable.

## 5.2 Critères d'étalonnage sur deux ans des taux à court terme

Comme pour le taux d'intérêt sans risque à long terme, des taux à court terme initiaux de 2 %, 4,5 % et 8 % ont été choisis pour représenter les contextes de taux sans risque à court terme faible, moyen et élevé, respectivement. Ceci n'empêche pas l'utilisation du modèle étalonné avec des taux initiaux à court terme inférieurs à 2 % ou supérieurs à 8 %.

Les critères sur un horizon de deux ans pour le taux à court terme sont présentés ci-dessous.

### Critères d'étalonnage sur deux ans

Percentile		Taux initial		
		2,00 %	4,50 %	8,00 %
Extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	0,85 %	2,35 %	5,50 %
	5 <sup>e</sup>	1,00 %	2,70 %	5,95 %
	10 <sup>e</sup>	1,15 %	3,10 %	6,40 %
Extrémité droite	90 <sup>e</sup>	3,00 %	5,90 %	9,75 %
	95 <sup>e</sup>	3,35 %	6,30 %	10,25 %
	97,5 <sup>e</sup>	3,60 %	6,65 %	10,65 %

Ces critères d'étalonnage seront respectés si la distribution des taux sur un an qui sont générés par le modèle à un horizon de deux ans sont inférieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieurs ou égaux à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite. Les critères d'étalonnage sont exprimés en rendements obligataires équivalents.

## 6. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE DE LA PENTE SUR 60 ANS

Il est attendu que les taux à long terme et à court terme soient corrélés. Par conséquent, les critères d'étalonnage de la pente sont fournis. Les critères d'étalonnage permettent

aussi de garantir que certains scénarios produisent des courbes de rendement inversées et que d'autres produisent des courbes de rendement prononcées.

La distribution de la pente de la courbe de rendement (définie comme étant la différence entre les taux à long terme et les taux à court terme) satisferait aux critères suivants sur 60 ans de la projection.

### Critères d'étalonnage de la pente sur 60 ans

Percentile	Critères d'étalonnage
5 <sup>e</sup>	-1,00 %
10 <sup>e</sup>	-0,25 %
90 <sup>e</sup>	2,50 %
95 <sup>e</sup>	3,00 %

Ces critères d'étalonnage seront satisfaits si la distribution des valeurs de la pente qui sont produites par le modèle à 60 ans de la projection sont inférieures ou égales à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité gauche et supérieures ou égales à chacun des critères d'étalonnage de l'extrémité droite.

### 6.1 Comparaison avec l'expérience historique

La comparaison avec l'expérience historique suivante est donnée à des fins de référence.

Percentile	Critères sur 60 ans	Janv. 1936 - déc. 2012	Écart
<b>Extrémité gauche, 5<sup>e</sup></b>	-1,00 %	-1,09 %	0,09 %
<b>10<sup>e</sup></b>	-0,25 %	-0,23 %	-0,02 %
<b>Extrémité droite, 90<sup>e</sup></b>	2,50 %	2,56 %	-0,06 %
<b>95<sup>e</sup></b>	3,00 %	3,02 %	-0,02 %

Les pentes historiques se fondent sur l'écart entre les taux réels sur un an et les taux réels sur plus de 10 ans de 1980 à 2012 et sur l'écart entre les taux synthétiques sur un an et les taux réels sur plus de 10 ans de 1936 à 1979.

## 7. CONSEILS SUR LES TAUX À MOYEN TERME

Les taux à moyen terme sont présumés s'inscrire dans la fourchette des échéances de cinq à 10 ans. Des conseils qualitatifs plutôt que des critères d'étalonnage quantitatifs sont fournis pour les taux sans risque à moyen terme.

Le principe directeur qui sous-tend la génération des taux sans risque à moyen terme est que ces taux seraient générés au moyen d'une méthode appropriée qui établit une relation logique entre les taux à moyen terme et ceux à court et à long termes. Selon les particularités de la construction du modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque, il est possible de calculer les taux à moyen terme en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes. Les taux à moyen terme peuvent être :

1. modélisés directement, avec leur propre processus stochastique (comme ceux utilisant les modèles Hull-White, CIR, Brennan-Schwartz, Black-Karasinski ou une autre forme de modèle à un seul facteur) et avec d'autres points de la courbe de

- rendement où chacun a son propre processus stochastique, et avec une corrélation appropriée entre les processus; ou
2. modélisés dans le cadre d'une analyse en composantes principales, selon laquelle les changements dans les caractéristiques de la courbe de rendement (ce qui peut inclure, par exemple, un ou plusieurs niveaux, pentes ou courbures de la courbe de rendement) servent à projeter les mouvements de la totalité de la courbe de rendement au fil du temps; ou
  3. modélisés de façon à ce que la totalité de la courbe de rendement soit générée au moyen de modèles de structure des échéances des taux d'intérêt, avec un seul ou plusieurs facteurs; ou
  4. estimés à partir des taux à court terme et des taux à long terme modélisés, lorsque ces taux sont modélisés avec leurs propres processus stochastiques.

Il convient de souligner qu'il est possible d'étalonner directement les distributions des taux individuels à l'aide des méthodes 1 et 4, mais non des méthodes 2 et 3.

Si la méthode 1 est utilisée, le(s) processus stochastique(s) pour les taux à moyen terme seraient étalonnés de la façon la plus cohérente possible avec à la fois les processus stochastiques des taux à court terme et à long terme, de sorte que le(s) taux à moyen terme soient cohérents à la fois avec les taux à court terme et à long terme. La cohérence est de mise à la fois pour la méthode des critères d'étalonnage et pour les paramètres définitifs choisis. Ceci est suffisant pour respecter les exigences des conseils sur les taux à moyen terme, pourvu que les taux à long terme et à court terme satisfassent à leurs critères d'étalonnage respectifs.

Si on a recours aux méthodes 2 ou 3 ci-dessus et à condition que le modèle soit établi de manière appropriée et que les taux à court terme et les taux à long terme respectent leurs critères d'étalonnage respectifs, les taux à moyen terme seraient naturellement conformes à ceux à court terme et à long terme. Ceci est suffisant pour respecter les exigences des conseils sur les taux à moyen terme.

Si les taux d'intérêt à moyen terme ne sont pas modélisés et sont plutôt estimés à partir des taux à long terme et des taux à court terme modélisés (c.-à-d. au moyen de la méthode 4), alors les taux à moyen terme peuvent être calculés à l'aide de l'une des techniques d'estimation suivantes données en exemple :

- interpolation non linéaire entre les taux à court terme et les taux à long terme; ou
- analyse de régression avec les taux à court terme et les taux à long terme comme variables indépendantes.

Ces techniques d'estimation permettraient de satisfaire aux exigences relatives aux taux à moyen terme, à condition que les taux à court terme et les taux à long terme satisfassent à leurs critères d'étalonnage respectifs.

Bien que l'actuaire ne soit pas tenu d'appliquer l'une ou l'autre des techniques d'estimation susmentionnées, certaines méthodes seraient considérées comme étant inappropriées. À moins qu'on n'apporte la preuve du contraire, ou sauf si leur application a un impact négligeable, l'interpolation linéaire des taux à court terme et à long terme ou le fait de supposer que les taux à moyen terme sont identiques à ceux à court ou à long

terme n'est pas approprié pour calculer les taux à moyen terme et ne satisferait pas aux exigences des conseils concernant les taux à moyen terme.

## 8. PRODUCTION DE SCÉNARIOS

L'actuaire démontrerait d'abord que l'ensemble de taux d'intérêt sans risque stochastiques satisfait à tous les critères d'étalonnage d'après les trois ensembles de taux initiaux fixes, soit :

- taux à court terme de 2,00 %, taux à long terme de 4,00 % ;
- taux à court terme de 4,50 %, taux à long terme de 6,25 % ;
- taux à court terme de 8,00 %, taux à long terme de 9,00 % .

Il faudrait démontrer l'étalonnage des critères seulement quand le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et(ou) les paramètres sont mis à jour ou quand les critères d'étalonnage eux-mêmes sont mis à jour.

Une fois qu'il peut être établi que le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque est bien étalonné, le modèle peut être utilisé pour générer des scénarios de taux d'intérêt aux fins d'évaluation en utilisant les mêmes paramètres et à tout le moins le nombre de scénarios<sup>6</sup> utilisés pour démontrer l'étalonnage en fonction des critères et en utilisant les taux d'intérêt sans risque initiaux réels qui sont appropriés pour la date d'évaluation.

Il est possible de n'utiliser qu'un sous-ensemble des scénarios dans l'évaluation réelle selon la MCAB. Une discussion portant sur les techniques de réduction des scénarios ne s'inscrit pas dans la portée du présent document de recherche et l'actuaire consulterait la documentation disponible à ce sujet. L'actuaire peut aussi se reporter à la sous-section 1510 des normes de pratique au sujet du recours à des approximations.

## 9. CRITÈRES D'ÉTALONNAGE POUR D'AUTRES PAYS

Les scénarios produits à partir des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui satisfont aux critères d'étalonnage conviendraient aux fins des évaluations fondées sur des hypothèses de réinvestissement sans risque au Canada. Un actuaire qui construit un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque pour les obligations du gouvernement américain et les économies de plusieurs autres pays industrialisés (mais non de tous les pays industrialisés) prendrait en compte ces critères comme point de départ et y apporterait les ajustements jugés appropriés. En faisant preuve d'un tel jugement, on peut tenir compte de l'historique des taux, des données sur les marchés et des conditions économiques et politiques. Si des critères d'étalonnage pertinents au pays ou à la devise qui fait l'objet de la modélisation ont été publiés, on pourrait y avoir recours comme autre source de renseignements et pour aider l'actuaire à se faire une opinion. L'utilisation de ces critères d'étalonnage peut être acceptable s'il est possible de prouver qu'ils sont conformes en règle générale aux critères d'étalonnage énoncés dans le présent document de recherche (soit les critères d'étalonnage sont eux-mêmes dans l'ensemble conformes, soit l'approche appliquée pour élaborer les critères d'étalonnage est dans l'ensemble

---

<sup>6</sup> Il est aussi possible d'exécuter moins de scénarios que le nombre de scénarios utilisés aux fins de l'étalonnage, ce qui fait alors partie des techniques de réduction des scénarios et du recours à des approximations.

conforme au présent document de recherche). S'il est impossible de le prouver, il ne serait alors pas approprié d'utiliser les critères d'étalonnage de l'autre pays sans procéder à des ajustements.

Les pays où les taux ont été inhabituellement faibles récemment ou élevés pendant de longues périodes constitueraient des exemples où il peut ne pas être approprié d'avoir recours aux critères d'étalonnage. Dans certains pays, l'historique peut être limité et il peut être nécessaire d'avoir une distribution plus large des taux relativement à ces observations limitées afin de prévoir une marge pour incertitude.

Enfin, il ne serait pas approprié d'appliquer les critères d'étalonnage aux marchés dont l'économie est en développement ou en émergence.

## ANNEXE A

On établit le passif selon la MCAB en modélisant les flux monétaires de l'actif et du passif en fonction d'un ensemble défini de scénarios et en comparant les soldes du passif des contrats d'assurance qui en découlent. Si l'approche déterministe est adoptée, l'ensemble des scénarios est celui prescrit à la sous-section 2330 des normes de pratique auquel s'ajoutent les scénarios supplémentaires que l'actuaire juge appropriés en fonction du profil de risque du passif des contrats d'assurance. Le passif des contrats d'assurance est établi pour se trouver dans la fourchette supérieure des résultats qui en découle et est au moins aussi élevé que le passif des contrats d'assurance le plus élevé découlant des scénarios prescrits. Si une approche stochastique est utilisée, un grand nombre de scénarios de taux d'intérêt différents est généré de manière stochastique, le passif des contrats d'assurance étant calculé pour chaque scénario. Le passif des contrats d'assurance est établi, à la discrétion de l'actuaire, pour être conforme aux normes de pratique.

### **Modélisation stochastique des taux d'intérêt**

La modélisation stochastique des taux d'intérêt se rapproche de la modélisation stochastique du rendement des actions (qui sert habituellement à modéliser les garanties d'investissement de rente variable). Elle en diffère en ce sens qu'une part importante de la modélisation des fluctuations des taux d'intérêt repose sur une hypothèse de taux non négatifs et, généralement, sur une certaine forme de retour à la moyenne. La moyenne est habituellement choisie en fonction d'un ensemble pertinent de taux d'intérêt historiques. Le modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque utilisé servira à définir la manière dont les taux fluctuent d'une période à l'autre au moyen d'une formule appliquée aux valeurs générées grâce à une simulation Monte Carlo. Les paramètres du modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque représentent typiquement le niveau de retour à la moyenne, la volatilité et la force (ou la vitesse) du retour à la moyenne à long terme. Nous ne prescrivons pas, dans ce document de recherche sur les critères d'étalonnage, le type de modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque ou l'établissement des paramètres, mais nous mettons plutôt l'accent sur les scénarios découlant de l'application du générateur de scénarios. L'actuaire a ainsi la marge de manœuvre nécessaire pour choisir l'une des formulations types de modèle ou en modifier une pour créer un nouveau modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque qui convient davantage à l'application sous étude.

### **Choix de la modélisation stochastique au lieu de la modélisation déterministe**

La modélisation stochastique des taux d'intérêt ne s'éloigne pas radicalement des mesures déterministes. Il s'agit d'une forme améliorée d'essai de scénarios dans le cadre de laquelle un grand nombre de scénarios aléatoires sont élaborés à l'aide d'un modèle qui est une représentation de l'évolution des taux d'intérêt dans l'environnement réel. Pour décider s'il aurait recours à la modélisation stochastique des taux d'intérêt à des fins d'évaluation, l'actuaire tiendrait compte de la complexité de l'interaction entre les taux d'intérêt et les flux monétaires de l'actif et du passif dans le modèle de la MCAB, et de l'importance de l'impact de la volatilité des taux d'intérêt sur les résultats. Si le produit est conçu de façon à ce que la plupart des sorties de fonds du passif se feront dans une fourchette relativement étroite autour de la moyenne de la distribution des résultats,

l'approche qui consiste à utiliser la meilleure estimation plus une marge explicite est appropriée. Si, cependant, il y a des sorties de fonds importantes qui ne se produisent que dans les zones à faible probabilité de la distribution (les extrémités), une approche stochastique peut alors produire une image plus appropriée de la portée des expositions des taux d'intérêt. La modélisation stochastique de taux d'intérêt sans risque peut aussi se révéler l'approche privilégiée s'il n'y a aucune meilleure estimation naturelle, par exemple lorsqu'il s'agit de modéliser les taux d'intérêt disponibles à des fins de réinvestissement dans 25 ans ou plus.

### **Considérations d'ordre pratique**

Le passif stochastique selon la MCAB correspond à la moyenne d'un sous-ensemble des passifs des contrats d'assurance les plus élevés qui en découlent. Il importe de souligner que cela peut vouloir dire que le passif des contrats d'assurance correspond à une moyenne des scénarios qui ne sont ni les scénarios de taux d'intérêt les plus faibles ni les scénarios de taux les plus élevés. Prenons, par exemple, un produit avec flux monétaires positifs nets élevés provenant de primes pour les dix prochaines années, et avec flux monétaires négatifs découlant au cours des dix années subséquentes, de sorte que, à l'année 20, la masse des flux monétaires soit négative, les prestations excédant alors les primes et flux monétaires d'actifs. Un scénario défavorable comportera alors de faibles taux d'intérêt pendant les dix premières années et des taux plus élevés pendant les années après l'année 20. Il s'agit d'un résultat naturel de la modélisation stochastique. S'il faut déterminer un vecteur de taux d'intérêt moyen unique afin de subdiviser un bloc de contrats après l'exécution de la MCAB, alors un curieux schéma pourrait en résulter.

### **Exemples de types de modèles d'utilisation courante**

Dans cette section, des exemples de modèles simples de taux d'intérêt sont présentés. Le but est d'illustrer comment certains modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque peuvent être utilisés en pratique. Ceci ne constitue pas une recommandation d'un modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque en particulier. En fait, les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque plus complexes permettront un meilleur ajustement aux points d'étalonnage.

La plupart des modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque présentés ici ont la caractéristique commune d'être des modèles avec retour à la moyenne. Le retour à la moyenne est une caractéristique reconnue des taux d'intérêt, ce qui est bien documenté dans les ouvrages financiers disponibles. Les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque présentés dans ce document se caractérisent par un processus de dérive et par un processus de diffusion. Le processus de dérive définit le taux et la rapidité du retour à la moyenne du taux d'intérêt. Le processus de diffusion, ou stochastique, varie d'un modèle à l'autre. Le modèle Nelson-Siegel a une formulation différente qui est utile pour tenir compte de la dynamique de toute la courbe des taux d'intérêt.

Les renvois ci-après à Vasicek, CIR et B-S sont des renvois à une *forme de modèle* par opposition à un *modèle*. La différence est que l'application type des modèles vise à projeter le *taux à court terme* (c.-à-d., le taux instantané) qui est ensuite utilisé pour dériver toute la courbe des rendements à terme. Dans le présent document, les *formes de modèles* Vasicek, CIR et B-S sont empruntées, mais sont plutôt utilisées pour projeter un point unique sur la courbe de rendement nominal (par opposition au *taux à court terme*).

### Forme du modèle Vasicek

Le modèle Vasicek, dans sa forme discrète, se présente par l'équation suivante :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + \sigma\varepsilon_t,$$

où

$\tau$  correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le processus retourne;

$\alpha$  correspond à la vitesse du retour à la moyenne qui se situerait entre 0 et 1; 0 signifierait aucun retour à la moyenne et 1, un retour complet à la moyenne au cours de la période suivante;

$\sigma$  est le paramètre de volatilité;

$$\varepsilon_t \sim N(0,1).$$

Le taux d'intérêt à l'état stationnaire projeté suivra une distribution normale décrite par :

$$r_t \sim N\left(\tau, \frac{\sigma^2}{1-(1-\alpha)^2}\right),$$

d'où

$$r_t \sim N\left(\tau, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$$

pour des intervalles suffisamment petits.

### Forme de modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Ce modèle est semblable au modèle Vasicek, sauf que le processus de diffusion est gradué selon la racine carrée du niveau de taux d'intérêt. Ce modèle, dans sa forme discrète, se présente par l'équation suivante :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + \sigma\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_t,$$

où

$\tau$  correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le processus retourne;

$\alpha$  correspond à la vitesse du retour à la moyenne qui se situerait entre 0 et 1; 0 signifierait aucun retour à la moyenne et 1, un retour complet à la moyenne au cours de la période suivante;

$\sigma$  est le paramètre de volatilité; et

$$\varepsilon_t \sim N(0,1).$$

Ce modèle a l'avantage de produire une distribution asymétrique qui se rapproche davantage des données historiques. Le processus de diffusion est gradué selon la racine carrée du niveau de taux d'intérêt, ce qui fait en sorte que le taux d'intérêt ne devient pas négatif; plus le taux d'intérêt se rapproche de zéro, plus la formulation se rapproche d'un processus de retour à la moyenne sans terme aléatoire. La forme du modèle est donc en mesure de générer des scénarios avec des taux qui atteignent les niveaux enregistrés au début des années 1980 et d'éviter des taux d'intérêt négatifs dans d'autres scénarios. Il y



a une solution analytique à la distribution des taux à tous les futurs horizons de projection.

### Forme de modèle Brennan-Schwartz

Le modèle Brennan-Schwartz est semblable au modèle CIR, la différence étant que le processus de diffusion est maintenant gradué en fonction du niveau de taux d'intérêt. Dans sa forme discrète, ce modèle repose sur l'équation suivante :

$$r_t = (1 - \alpha)r_{t-1} + \alpha\tau + \sigma r_{t-1} \varepsilon_t,$$

où

- $\tau$  correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le processus retourne;
- $\alpha$  correspond à la vitesse du retour à la moyenne qui se situerait entre 0 et 1; 0 signifierait aucun retour à la moyenne et 1, un retour complet à la moyenne au cours de la période suivante;
- $\sigma$  est le paramètre de volatilité; et
- $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .

En raison de la graduation plus forte du terme de diffusion, la distribution du taux d'intérêt à long terme qui en résulte sera plus asymétrique comparativement à celle du modèle CIR.

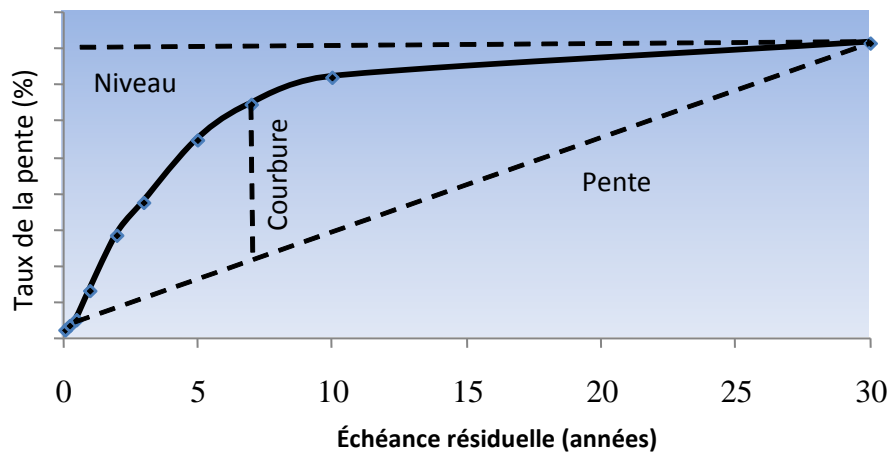
### Modèle Nelson-Siegel

Contrairement aux formes de modèles décrites précédemment, qui peuvent être utilisées pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt d'une échéance résiduelle en particulier sur la courbe des taux d'intérêt, Nelson et Siegel<sup>7</sup> ont proposé, en 1987, une forme de modèle qui permet de modéliser toute la structure des échéances des taux d'intérêt. Près de deux décennies plus tard, Diebold et Li<sup>8</sup> ont démontré que le modèle Nelson-Siegel pouvait être repositionné comme formule contenant trois facteurs qui illustrent les caractéristiques de la courbe de rendement, soit le niveau, la pente et la courbure (voir la figure 1).

<sup>7</sup> Charles R. Nelson et Andrew F. Siegel, « Parsimonious Modeling of Yield Curves », *Journal of Business*, vol. 60, n° 4, 1987, pages 473-489.

<sup>8</sup> Francis X. Diebold et Canlin Li, « Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields », *Journal of Econometrics*, vol. 130, 2006, pages 337-364.

Figure 1. Caractéristiques de la courbe de rendement : niveau, pente et courbure



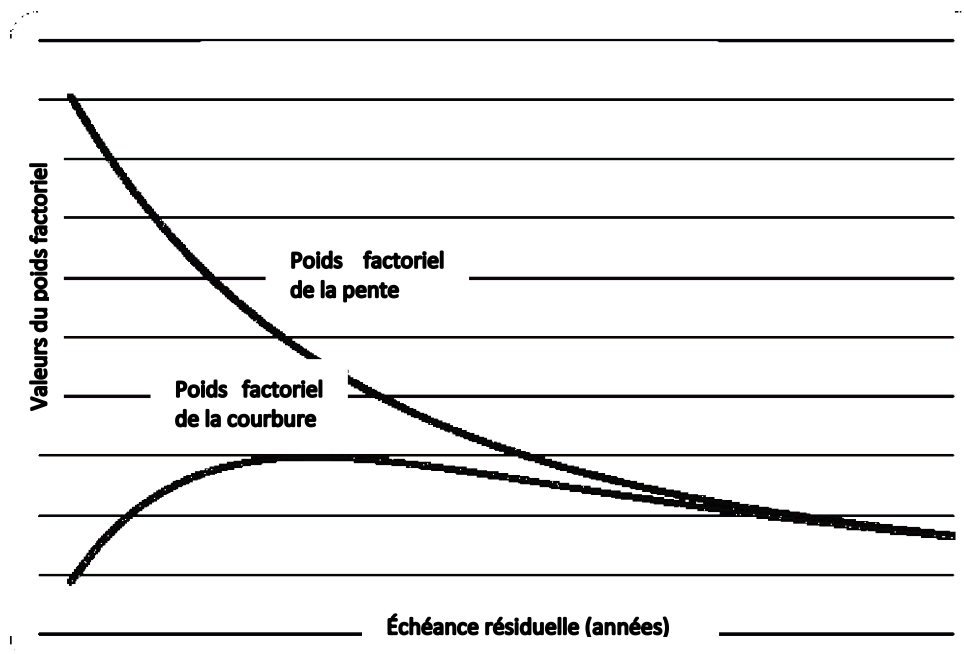
Le modèle prend la forme suivante :

$$y_t(T) = L_t + S_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} \right) + C_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t T}}{\lambda_t T} - e^{-\lambda_t T} \right)$$

où

- $y_t(T)$  représente le taux d'intérêt au moment  $t$  avec l'échéance résiduelle  $T$ ;
- $L_t, S_t, C_t$ , représente les facteurs niveau, pente et courbure;
- $\lambda_t$  régit le taux de dégradation exponentielle des poids factoriels appliqués aux facteurs pente et courbure.

Pour illustrer, la figure 2 présente sous forme de diagramme les poids factoriels de la pente et de la courbure à l'égard d'échéances résiduelles en hausse  $T$ , vu que  $\lambda = 0.2$ . Comme on peut le constater, l'effet du poids factoriel de la pente est à son point le plus fort quand  $T = 0$  et s'amenuise exponentiellement vers zéro au fur et à mesure que l'échéance résiduelle augmente. L'influence du poids factoriel de la courbure, par ailleurs, se fait principalement sentir au milieu de la courbe et diminue à l'extrémité plus courte et plus longue de la courbe.

Figure 2 Poids factoriels de la pente et de la courbure pour  $\lambda = 0,2$ 

Les courbes des taux d'intérêt sont modélisées par projection de chacun des paramètres niveau, pente et courbure. Étant donné que ces paramètres sont peu corrélés selon les données historiques, des formes de modèles à un seul facteur indépendantes comme celles déjà décrites dans la présente annexe peuvent être utilisées pour projeter dans le temps les paramètres du modèle Nelson-Siegel.

Parmi ses principaux avantages, le modèle Nelson-Siegel offre une approche intuitive à l'égard de la modélisation de toute la structure des échéances des taux d'intérêt et s'est avéré être en mesure de s'adapter à un large éventail de formes de courbes observées dans les données historiques du Canada et des États-Unis. Cependant, l'étalonnage du modèle s'avère être un défi puisqu'il faut habituellement beaucoup de données historiques afin de pouvoir définir les niveaux, pentes et courbures.

## ANNEXE B

Dans cette annexe, nous présentons les paramètres et les spécifications des modèles pour les formes de modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque utilisés dans l'élaboration des critères d'étalonnage dans le présent document de recherche.

Cette information est transmise à des fins de transparence et pour aider l'actuaire à comprendre comment les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque fonctionnent et sont étalonnés et utilisés pour définir les critères. L'actuaire est mis en garde contre le fait de simplement appliquer ces modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque dans le cadre de son travail; il s'agit plutôt d'acquérir suffisamment d'expertise afin de pouvoir porter un jugement actuariel dans le choix d'une forme particulière de modèle stochastique de taux d'intérêt sans risque et des paramètres conformément aux critères d'étalonnage.

Les formes de modèle **Brennan-Schwartz** suivantes ont été utilisées pour élaborer et mettre à l'essai les critères :

Taux à long terme :

$$r_t^l = (1 - \alpha_1)r_{t-1}^l + \alpha_1\tau_1 + \sigma_1 r_{t-1}^l \varepsilon_t$$

Taux à court terme :

$$r_t^s = (1 - \alpha_2)r_{t-1}^s + \alpha_2\tau_2 + \sigma_2 r_{t-1}^s \zeta_t$$

Où pour  $i = 1, 2$  :

$\tau_i$  correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le processus retourne;

$\alpha_i$  correspond à la vitesse du retour à la moyenne;

$\sigma_i$  est le paramètre de volatilité;

$\varepsilon_t, \zeta_t \sim N(0,1)$ ;

$\rho = \text{correl}(\varepsilon_t, \zeta_t)$ .

Pour déterminer les critères, deux ensembles de paramètres sont pris en compte et sont indiqués dans le tableau suivant. Les paramètres annualisés sont indiqués ci-après aux fins d'illustration tandis que les paramètres mensuels correspondants ont été utilisés dans la modélisation réelle. Les deux ensembles de paramètres sont estimés en adaptant les formes de modèles à long terme et à court terme à leurs critères d'étalonnage respectifs sur un horizon de 60 ans. Le paramètre de corrélation correspond à la corrélation historique entre les fluctuations des taux à long terme et à court terme dans toutes les données historiques.

Paramètres annualisés ( $i = 1, 2$ )	Ensemble de paramètres 1		Ensemble de paramètres 2	
	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme
$\alpha_i$ ( $1/\alpha_i$ ) <sup>9</sup>	3,50 % (28,6 ans)	4,00 % (25,0 ans)	6,00 % (16,7 ans)	7,00 % (14,3 ans)
$\tau_i$	6,22 %	5,70 %	6,23 %	5,70 %
$\sigma_i$	14,00 %	36,90 %	18,26 %	49,58 %
$\rho$	0,6058		0,6058	

La forme de modèle **CIR** suivante a été utilisée pour élaborer et mettre à l'essai les critères.

Taux à long terme :

$$r_t^l = (1-\alpha)r_{t-1}^l + \alpha\tau + \sigma_1\sqrt{r_{t-1}^l}\varepsilon_t,$$

Taux à court terme :

$$r_t^s = (1-\phi)r_{t-1}^s + \phi(r_{t-1}^l - \theta) + \beta(r_t^l - r_{t-1}^l) + \sigma_2\sqrt{r_{t-1}^l}\zeta_t,$$

où

- $\tau$  correspond au niveau du retour à la moyenne auquel le taux à long terme retourne;
- $\alpha$  correspond à la vitesse du retour à la moyenne des taux à long terme;
- $\sigma_1$  est le paramètre de volatilité des taux à long terme;
- $\theta$  représente l'écart stationnaire entre les taux à court terme et les taux à long terme;
- $\phi$  correspond à la puissance du retour à la moyenne;
- $\beta$  est une constante liée à la fluctuation des taux à long terme d'une période à l'autre;
- $\sigma_2$  est le paramètre de volatilité des taux à court terme;
- $\varepsilon_t, \zeta_t \sim N(0,1)$ .

Comme pour le modèle Brennan-Schwartz, deux ensembles de paramètres sont utilisés pour élaborer les critères et les paramètres sont estimés en adaptant les formes du modèle à leurs critères d'étalonnage respectifs sur un horizon de 60 ans. Les paramètres

<sup>9</sup> Dans les tableaux ci-dessus, le taux de retour à la moyenne en années est défini comme *1/ la vitesse de retour à la moyenne*.

annualisés sont indiqués ci-dessous aux fins d'illustration tandis que les paramètres mensuels correspondants ont été utilisés dans la modélisation réelle.

Paramètres annualisés ( $i = 1, 2$ )	Ensemble de paramètres 1		Ensemble de paramètres 2	
	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme	Modèle de taux à long terme	Modèle de taux à court terme
$\alpha$ ( $1/\alpha$ )	4,25 % (23,5 ans)	S.O.	6,00 % (16,7 ans)	S.O.
$\phi$ ( $1/\phi$ )	S.O.	9,29 % (10,8 ans)	S.O.	9,29 % (10,8 ans)
$\tau$	6,45 %	S.O.	6,44 %	S.O.
$\sigma_i$	3,48 %	4,19 %	4,12 %	4,19 %
$\theta$	S.O.	1,49 %	S.O.	1,57 %
$\beta$	S.O.	-1,081	S.O.	-1,081
$\rho$	0,6058		0,6058	

Tant pour le modèle Brennan-Schwartz que pour le modèle CIR, les paramètres du modèle de taux à long terme, quand ils sont utilisés pour générer les critères d'étalonnage à court terme de taux à court terme, ne sont appariés qu'avec les paramètres du modèle de taux à court terme au sein du même ensemble de paramètres. Les critères d'étalonnage des taux à long terme ne se fondaient que sur les formes de modèles de taux à long terme. Les taux ont été projetés à un intervalle mensuel et au moins 10 000 scénarios ont été exécutés pour garantir la convergence.

## ANNEXE C

Dans la présente annexe, nous résumons comment les critères d'étalonnage des taux d'intérêt sans risque à long terme présentés dans ce document de recherche se comparent aux critères d'étalonnage originaux présentés dans la note éducative de 2009.

Aux fins de l'étalonnage au point de 60 ans, les critères actuels et les critères originaux sont indiqués dans le tableau suivant de même que l'expérience historique disponible qui a été utilisée pour générer chaque série de critères.

Critères d'étalonnage des taux d'intérêt à long terme				
	Horizon de 60 ans			
		Critères publiés	Critères révisés	Écart
Percentile, extrémité gauche	2,5 <sup>e</sup>	2,60 %	2,60 %	-
	5 <sup>e</sup>	2,95 %	2,80 %	(0,15) %
	10 <sup>e</sup>	3,40 %	3,00 %	(0,40) %
Percentile, extrémité droite	90 <sup>e</sup>	10,00 %	10,00 %	-
	95 <sup>e</sup>	12,00 %	12,00 %	-
	97,5 <sup>e</sup>	13,50 %	13,50 %	-

Pour les critères d'étalonnage sur deux ans et sur 10 ans, les écarts entre les critères actuels et les critères originaux dans la note éducative de 2009 sont indiqués dans le tableau suivant.

Changement dans les critères d'étalonnage				Révisés à publiés				
		Horizon de deux ans			Horizon de 10 ans			Horizon de 60 ans
		Taux initial			Taux initial			Taux initial
		4 %	6,25 %	9 %	4 %	6,25 %	9 %	6,25 %
Percentile, extrémité gauche		(0,10) %	(0,15) %	-	(0,20) %	(0,30) %	(0,35) %	-
		(0,10) %	(0,15) %	0,05 %	(0,20) %	(0,30) %	(0,20) %	(0,15) %
		(0,05) %	(0,15) %	0,10 %	(0,15) %	(0,25) %	(0,05) %	(0,40) %
Percentile, extrémité droite	90 <sup>e</sup>	0,10 %	0,10 %	(0,10) %	0,25 %	0,30	-	-
	95 <sup>e</sup>	0,15 %	0,15 %	(0,10) %	0,40 %	0,15	-	-
	97,5 <sup>e</sup>	0,15 %	0,10 %	(0,10) %	0,60 %	-	-	-

## ANNEXE D

Les critères d'étalonnage visent entre autres objectifs à garantir que les scénarios représentent adéquatement les périodes soutenues de faibles taux, pendant lesquelles le revenu de placement sur les réinvestissements nécessaires pour supporter les garanties à long terme est limité. Même si les critères d'étalonnage d'extrémité à un horizon ponctuel permettent dans une certaine mesure de garantir ce résultat, ils n'excluent pas les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui produisent des scénarios dont les périodes de faibles taux ont tendance à être de courte durée, et donc peu de scénarios présenteraient de faibles taux d'intérêt répartis en moyenne sur une période potentiellement longue durant laquelle le réinvestissement pourrait avoir un impact financier important. Il est possible de démontrer statistiquement l'existence de périodes soutenues de faibles taux si les scénarios qui sont relativement faibles dans les premières années ont tendance à le demeurer dans les années ultérieures. Par exemple, même s'il est possible d'adopter d'autres approches et comme solution de rechange à une preuve mathématique, il est possible de démontrer que le critère de retour à la moyenne est respecté à l'aide de la procédure suivante :

1. Trier les scénarios selon les taux à long terme, du plus faible au plus élevé, à l'année de projection  $T_0$ , où  $T_0$  correspond à une période suffisamment longue pour présenter une dispersion substantielle des taux, mais n'excédant pas la plupart des réinvestissements prévus. Pour un bloc type garanti à long terme,  $T_0$  pourrait varier entre cinq et 10 ans.
2. Regrouper les scénarios en fonction du quartile des taux à  $T_0$ , du plus faible (quartile 1) au plus élevé (quartile 4). Calculer l'ampleur de la dispersion des scénarios de faible taux, de la dispersion des scénarios centraux ( $T_0$ ) = taux moyen ( $T_0$ ) dans le quartile 1 – taux moyen ( $T_0$ ) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3).
3. En utilisant le même regroupement des scénarios (classés à la période  $T_0$ , et *non* reclassés à la période  $T_0+10$ ), calculer la dispersion 10 ans plus tard ( $T_0+10$ , classé  $T_0$ ) = taux moyen ( $T_0+10$ ) dans le quartile 1 – taux moyen ( $T_0+10$ ) dans la combinaison des quartiles (quartiles 2 et 3).
4. Le critère du retour à la moyenne pendant la période de projection de  $T_0$  à  $T_0 + 10$  est respecté si la dispersion ( $T_0+10$ , classée  $T_0$ )  $\geq$  dispersion de  $0,5 * (T_0)$ .
5. Si l'actuaire peut démontrer que le taux du retour à la moyenne du modèle est tout aussi robuste sur d'autres périodes de projection, cette mise à l'essai unique serait suffisante. Sinon, la mise à l'essai serait répétée pour des périodes d'impact financier suffisamment importantes pour démontrer l'existence des périodes soutenues de faibles taux.
6. Si, selon l'actuaire, la persistance des taux élevés cause des tensions financières pour une application en particulier, la démonstration serait répétée pour ces taux (quartile 4 par rapport aux quartiles 2 et 3).

Il est possible de démontrer qu'un modèle avec un régime unique et un retour à la moyenne linéaire simple (c.-à-d.,  $E(r(t+dt)) = r(t) + (1/\text{période de retour}) * dt$  (moyenne à



long terme –  $r(t)$ ) satisfait à ce critère d'étalonnage (avec un nombre suffisant de scénarios) si la période du retour  $> 14,5$  ans<sup>10</sup>. Si la période de projection ( $dt$ ) est supérieure à un mois, il se peut qu'il faille apporter un léger rajustement au seuil de la période du retour à la moyenne.

On n'aurait habituellement pas recours à des modèles comportant des caractéristiques qui invalideraient le but statistique de ce critère (c.-à-d., une composante cyclique des taux avec une périodicité d'environ 10 ans). Si des circonstances exceptionnelles font en sorte que l'actuaire estime qu'un modèle du genre est approprié, l'actuaire élaborerait des méthodes statistiques robustes convenant aux caractéristiques du modèle pour démontrer l'existence de périodes soutenues importantes de faibles taux, conformément à ce critère.

Enfin, il semble probable que les modèles stochastiques de taux d'intérêt sans risque qui, à la fois, satisfont aux critères d'étalonnage de l'extrémité à l'équilibre à long terme et reproduisent de près la volatilité représentative au plan historique répondront aussi à ce critère du retour à la moyenne, même si pour certains modèles, il faudra peut-être apporter de légers ajustements aux paramètres. Certaines estimations de retour à la moyenne basées sur la concordance statistique avec l'historique des fluctuations des taux peuvent produire un retour à la moyenne plus fort (période plus courte) dans une certaine mesure ou plus faible (période plus longue) que celui généré par ce critère d'étalonnage. Les estimations statistiques du retour à la moyenne ont tendance à comporter une bonne dose d'incertitude et peuvent varier considérablement selon la période historique utilisée pour l'estimation. Ainsi, un retour à la moyenne plus fort que celui généré par ce critère, même s'il s'agit d'une meilleure estimation statistique, peut donner un sentiment de confiance trompeur relativement à la probabilité de périodes soutenues de taux extrêmes.

---

<sup>10</sup> Avec ce simple retour à la moyenne, à la limite continue,  $E(r(t+n)) = \text{moyenne à long terme} + \exp(-n/\text{période de retour}) * (r(t) - \text{moyenne à long terme})$ . Pour une période écoulée  $n$  de 10 ans, le coefficient de pondération de dégradation exponentielle sur le taux initial sera  $\geq 0,5$  lorsque la période du retour à la moyenne sera  $\geq 10 / \ln(2) = 14,42$ .

**ANNEXE E**

Nous avons estimé les taux historiques sur un an entre 1936 et 1979 de la manière suivante :

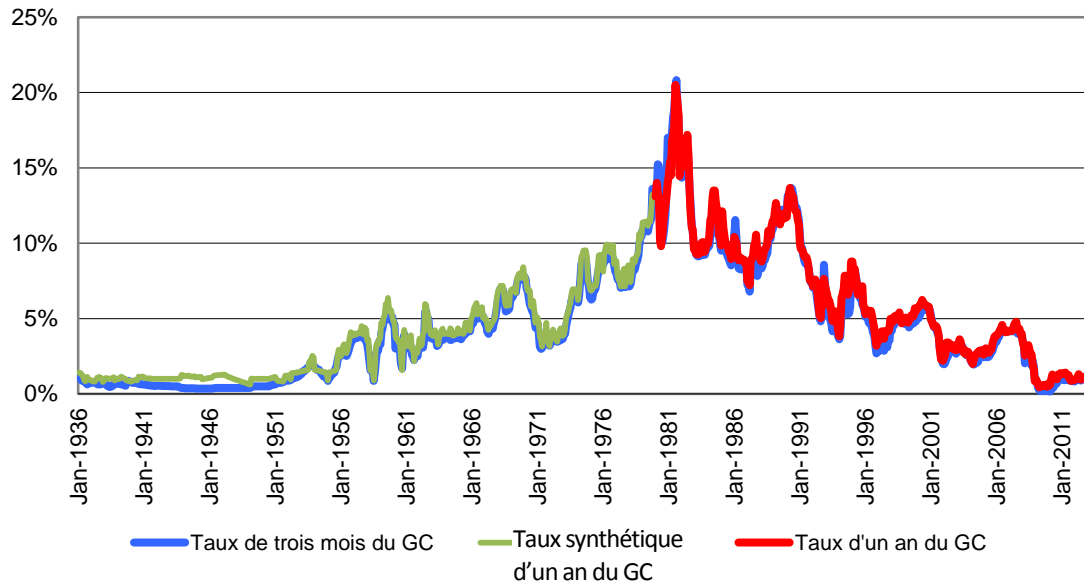
- Commencer avec deux séries mensuelles de données historiques, soit les taux sur trois mois (Banque du Canada, série V122541) et les taux sur un an (Banque du Canada, série V122533). Apparié les données d'après les dates. De 1936 à 1979, les taux sur un an sont manquants et l'« appariement » ne se compose que des taux sur trois ans.
- Retrier les données mensuelles appariées des données des séries chronologiques historiques sur trois mois et sur un an en ordre ascendant, classées sur le taux sur trois mois. Les points de données des taux sur un an manquants sont donc maintenant dispersés dans l'ensemble des séries de données réordonnées.
- Calculer les percentiles empiriques pour les taux sur trois mois et attribuer ce percentile à chacune des paires de points de données.
- Par interpolation linéaire fondée sur les percentiles des taux sur trois mois et les taux sur un an disponibles, combler les taux sur un an qui manquent comme suit :

$$ST_x = ST_{x-t} + \frac{ST_{x+s} - ST_{x-t}}{P_{x+s} - P_{x-t}} \times (P_x - P_{x-t}), \text{ où}$$

- $x$  représente la valeur de l'indice (ordonné d'après les taux sur trois mois) qui correspond à un taux sur un an manquant;
  - $x-t$  correspond à la valeur de l'indice du taux sur un an antérieur disponible, trié en fonction des taux sur trois mois en ordre ascendant;
  - $x+s$  est la valeur de l'indice du prochain taux sur un an suivant disponible, trié en fonction des taux sur trois mois en ordre ascendant;
  - $ST_x$  représente le taux sur un an manquant à l'indice  $x$ ;  $ST_{x-t}$  et  $ST_{x+s}$  sont les taux sur un an antérieur et suivant disponibles, triés en fonction des taux sur trois mois en ordre ascendant;
  - $P_{x-t}$ ,  $P_x$  et  $P_{x+s}$  correspondent aux percentiles empiriques associés aux taux sur trois mois.
- Réordonner la série de données historiques sur un an de façon à la remettre en ordre chronologique. Les taux entre 1936 et 1979 sont les taux synthétiques sur un an; les taux à compter de 1980 correspondent aux taux sur un an réels observés pendant cette période.

La série chronologique finale des taux sur un an figure dans le graphique ci-dessous de même que la série chronologique des taux sur trois mois, aux fins de comparaison.

### CAD - Janvier 1936 à décembre 2012



Source : Banque du Canada, séries V122541 et V122533